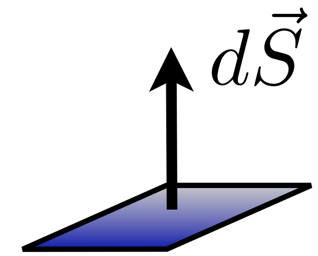
Lei de Gauss

Fluxo de um campo vetorial

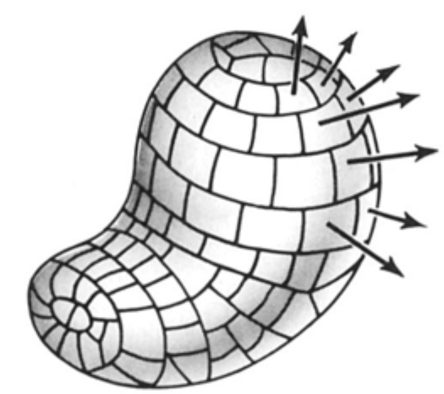
$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$d\vec{S}$ - vetor área; $|d\vec{S}| = dS$ é a área do elemento de superfície

Direção do vetor $d\vec{S}$ é $\perp$ à superfície

Sentido do vetor $d\vec{S}$: para superfícies fechadas, de dentro para fora; se a superfície for aberta é arbitrário.



$$\phi = \int_S d\phi$$

Mede a quantidade de campo (linhas de campo) que atravessa a superfície S

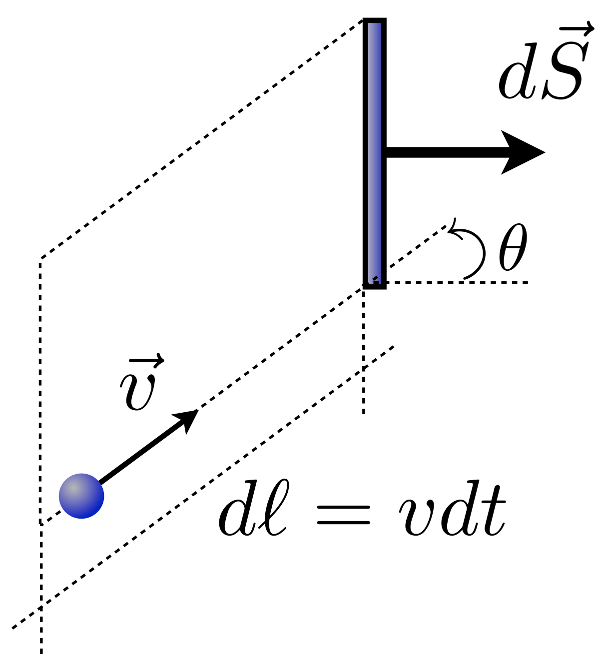
Soma sobre todos os elementos de área que compõem a superfície S

Análogo à vazão (campo de velocidades) de um fluído

Fluxo de um campo vetorial

Quantas partículas com velocidade $\vec{v}$ passam pelo elemento de área $d\vec{S}$ em um intervalo de tempo dt ?

Resposta: todas contidas no volume do prisma oblíquo de base dS e aresta $d\ell$. Apenas estas atravessam o lemento de área.



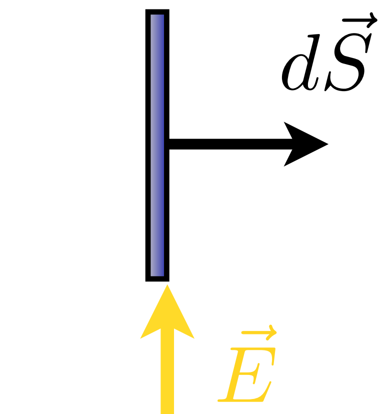
Volume do fluido que escoa através de $d\vec{S}$

$$dV = dS\, d\ell\, cos\,\theta = dS\, vdt\, cos\,\theta = \vec{v}\cdot d\vec{S}\, dt$$

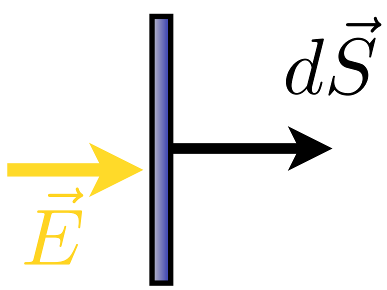
Fluxo ou vazão: $d\phi = \dfrac{dV}{dt} = \vec{v}\cdot d\vec{S}$

Fluxo de um campo vetorial

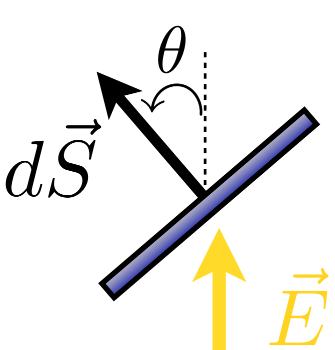
Vamos explorar um pouco esta definição de fluxo: $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$



(a) $\vec{E}$ é tangente à superfície $\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$



(b) $\vec{E}$ é perpendicular à superfície $\vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow d\phi = E\, dS$

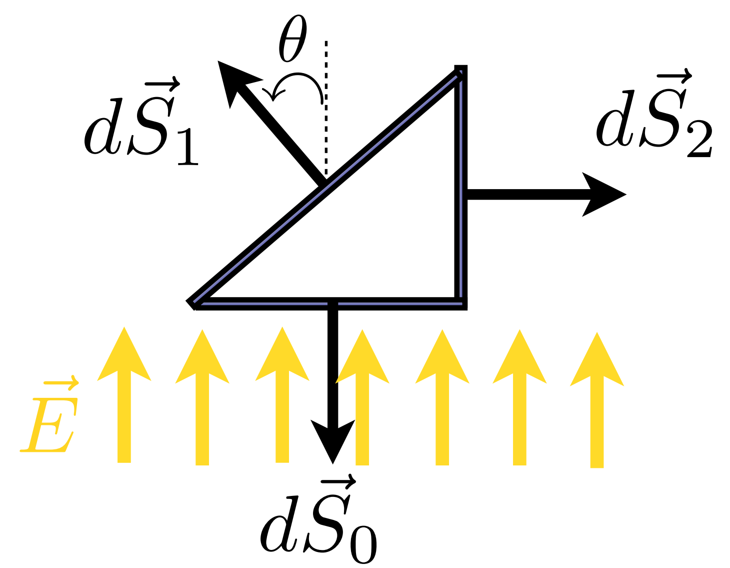


(c) $\vec{E}$ forma um ângulo θ com a superfície $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS\, cos\, \theta$

$E\, cos\, \theta$ - componente de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{S}$

Fluxo de um campo vetorial

(d) Superfície fechada, campo uniforme



$$d\phi_0 = -E dS_0$$

$$d\phi_1 = E dS_1 \cos\theta$$

$$d\phi_2 = 0 \qquad \left(\vec{E} \perp d\vec{S}_2\right)$$

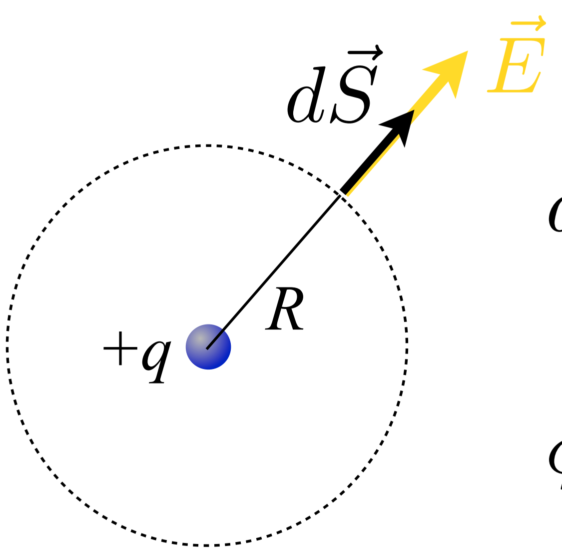
Fluxo total: $d\phi = d\phi_0 + d\phi_1 + d\phi_2$

Note que: $dS_1\, cos\,\theta = dS_0 \quad \Rightarrow \quad d\phi_1 = -d\phi_0$

Portanto, $\boxed{d\phi = 0}$ - tudo que entra sai

Fluxo de um campo vetorial

1. Cálculo do fluxo de campo elétrico produzido por uma carga pontual $+q$ através de uma superfície esférica de raio R centrada na carga $+q$.



$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$$

ao longo desta superfície o campo não varia em módulo

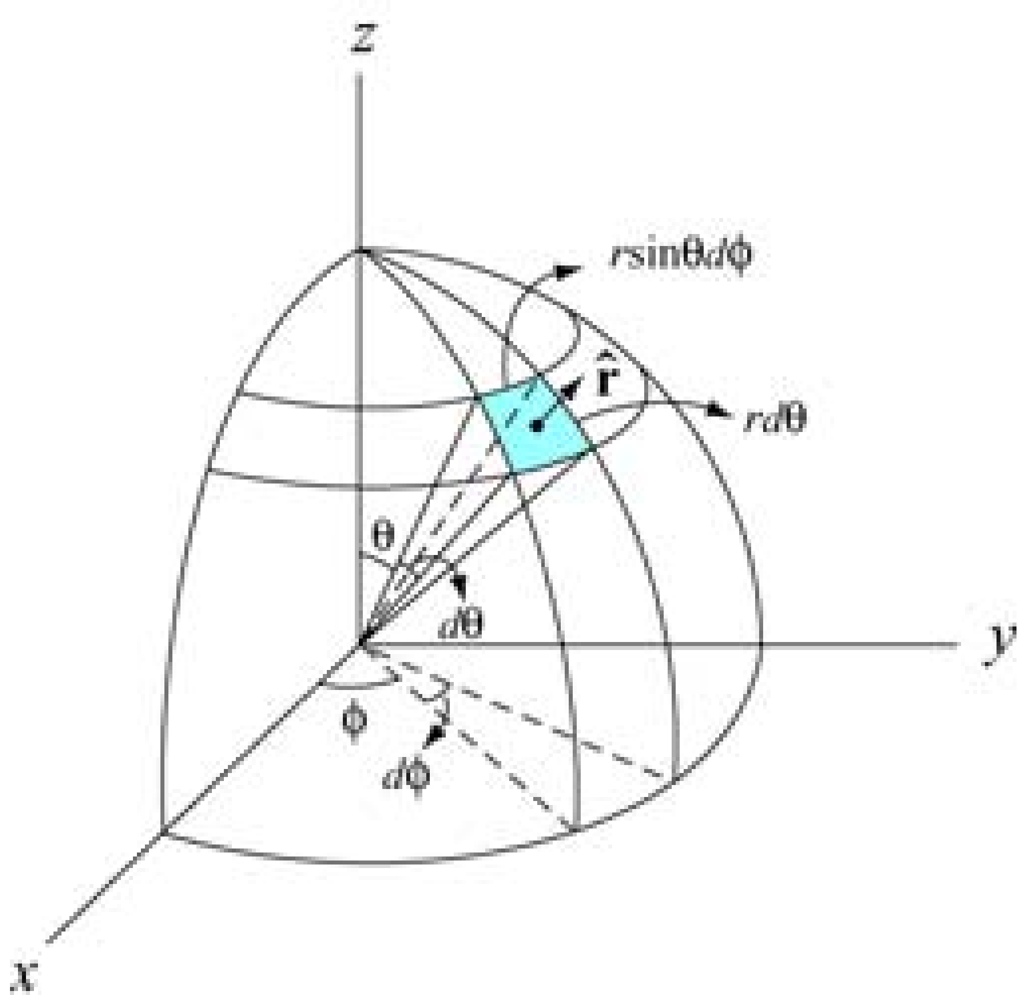
$$\phi = \int_S d\phi = \int_S E dS = E \int_S dS = ES = E\, 4\pi R^2$$

Soma sobre todos os elementos de área que compõem a superfície esférica

$$\phi = k \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

independente do raio da superfície esférica

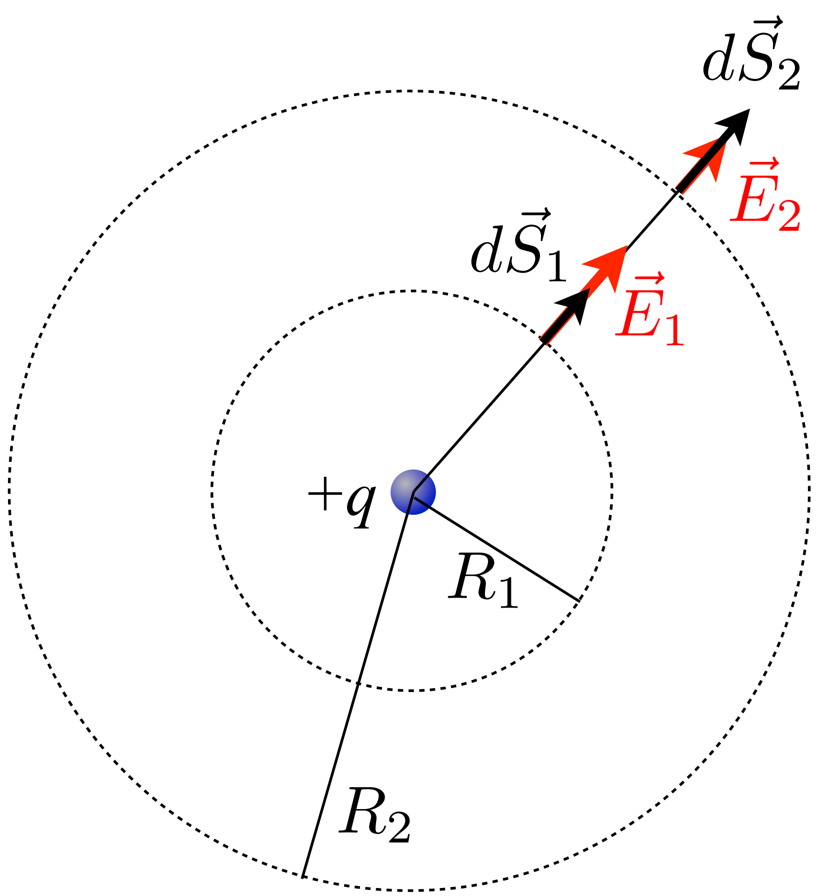
Elemento de área em coordenadas esféricas



$$dS = r^2 sin\,\theta\, d\theta\, d\phi$$

Fluxo de um campo vetorial

1. Cálculo do fluxo de campo elétrico produzido por uma carga pontual $+q$ através de elementos de superfícies esféricas concêntricas centradas na carga $+q$.



$$E_1 = k\frac{q}{R_1^2}$$

$$E_2 = k\frac{q}{R_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

$$dS_1 = R_1^2 \, sin\,\theta \, d\theta d\phi$$

$$dS_2 = R_2^2 \, sin\,\theta \, d\theta d\phi$$

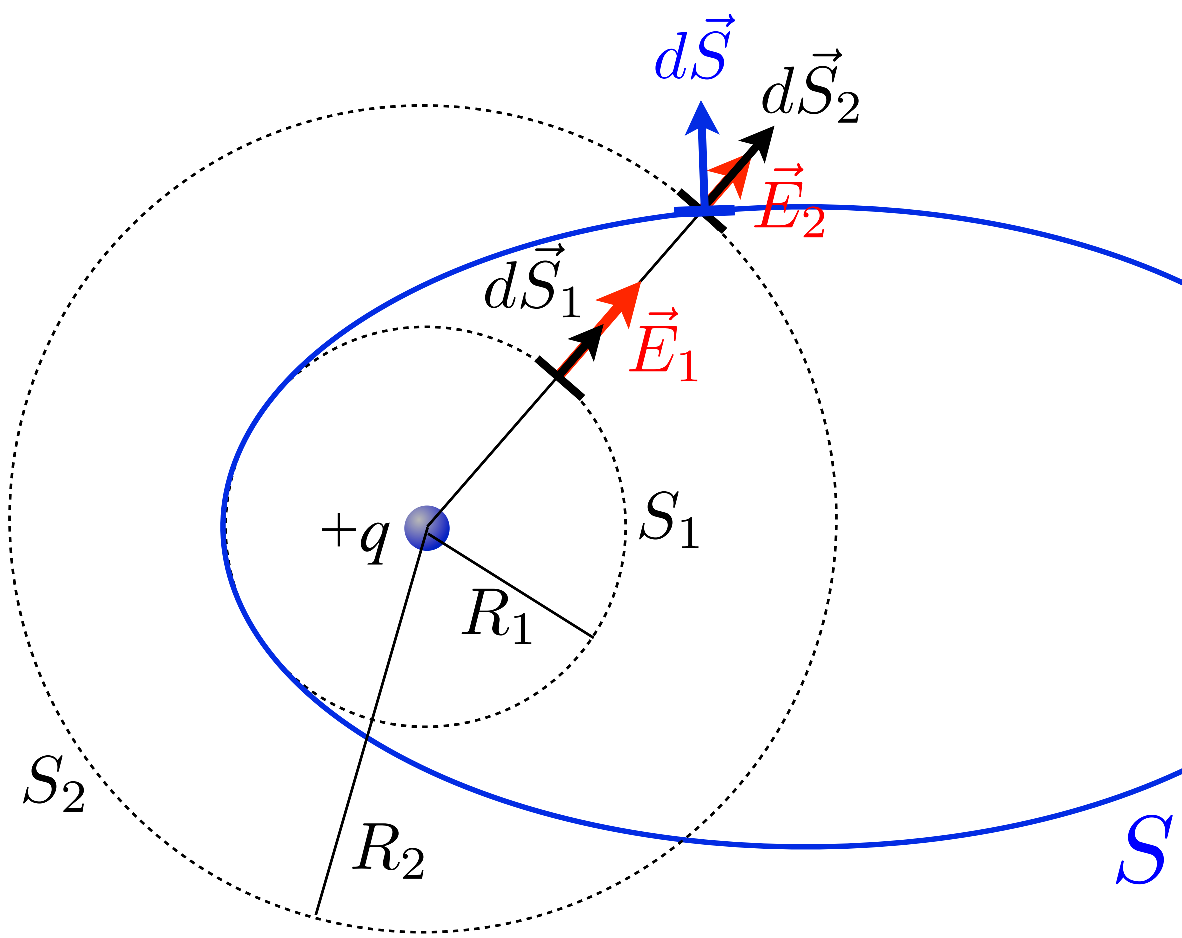
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dS_1}{dS_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

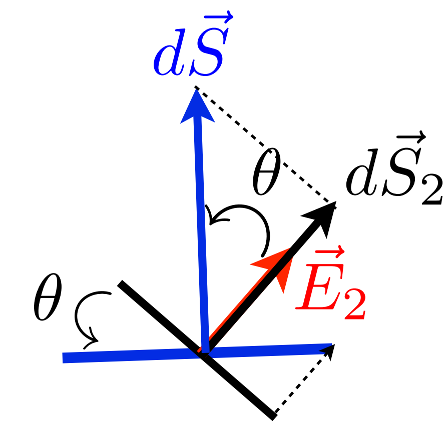
$$d\phi_1 = E_1 \, dS_1 \qquad d\phi_2 = E_2 \, dS_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)\left(\frac{dS_1}{dS_2}\right) = 1$$

$$\boxed{d\phi_1 = d\phi_2} \longleftarrow$$ ***Também independe do raio***

Fluxo de um campo vetorial

2. Vamos distorcer um pouco a segunda superfície e calcular o fluxo do campo elétrico gerado pela carga $+q$ através de S





$$d\phi = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2\, dS\, cos\, \theta$$

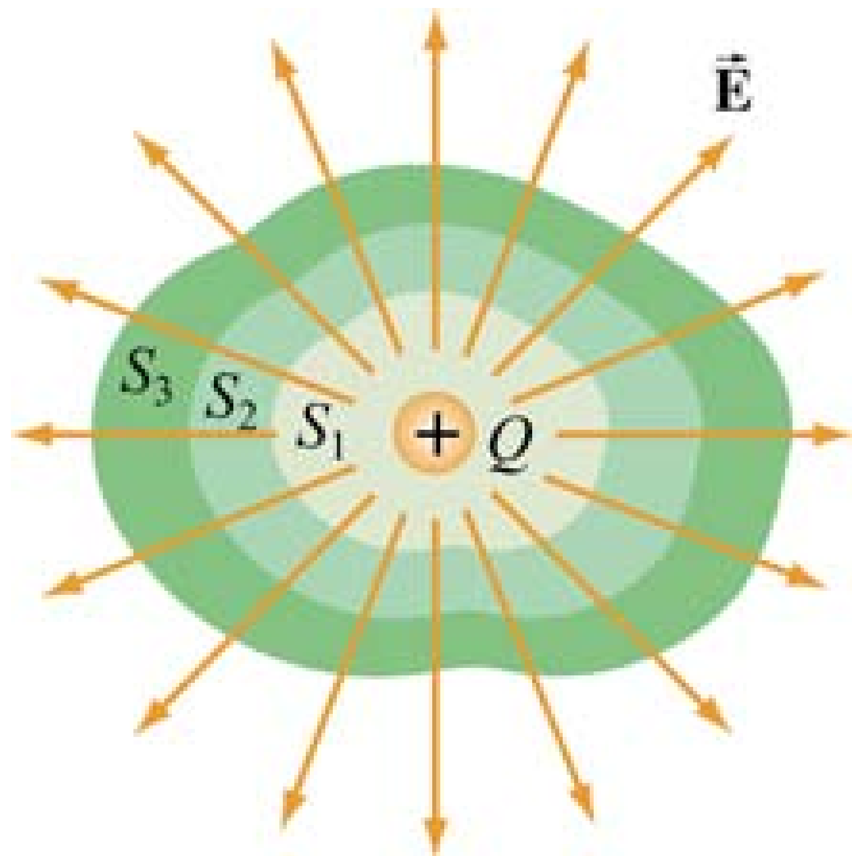
$$dS\, cos\, \theta = dS_2$$

$$d\phi = E_2\, dS_2 = d\phi_2$$

Entretanto, $d\phi_2 = d\phi_1$, portanto, $\phi = \int_S d\phi = \int_{S_1} d\phi_1 = \phi_1 = \frac{q}{\epsilon_0}$

Isto é verdade se a carga q estiver dentro do volume delimitado por S

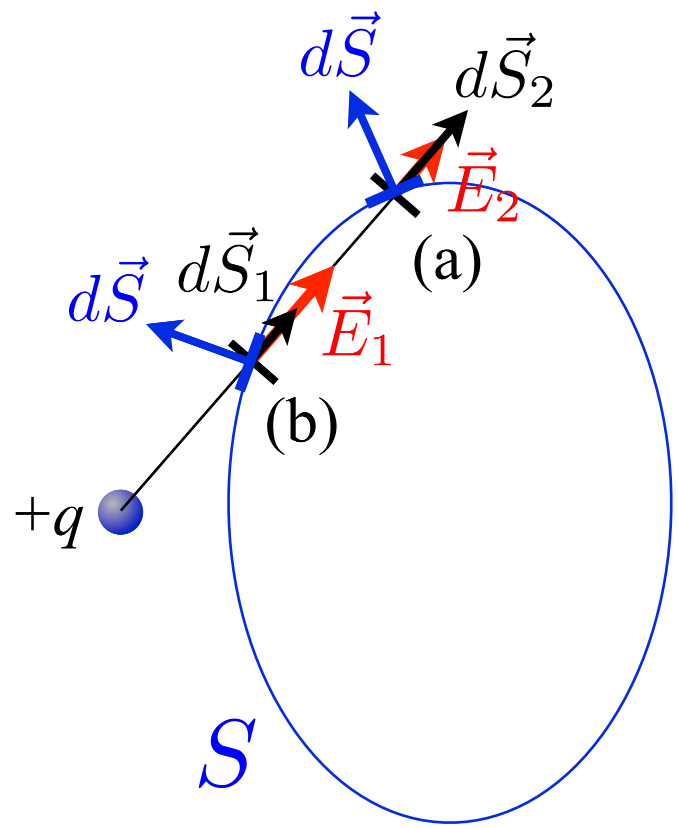
Fluxo independe da forma da superfície



$$\phi_{S_1} = \phi_{S_2} = \phi_{S_3}$$

Fluxo de um campo vetorial

3. Vamos supor que a carga $+q$ esteja fora do volume delimitado pela superfície S



$$d\phi^{(a)} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2\, dS\, cos\,\theta = E_2 dS_2 = d\phi_2^{(a)}$$

$$d\phi^{(b)} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1\, dS\, cos\,\theta = -E_1 dS_1 = -d\phi_1^{(b)}$$

Entretanto, já mostramos que $d\phi_2^{(a)} = d\phi_1^{(b)}$

Portanto, o fluxo de campo elétrico através de S, neste caso, é nulo

$$\phi = \int_S d\phi = 0$$

Isto é verdade se a carga q estiver fora do volume delimitado por S

Lei de Gauss

$$\boxed{\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

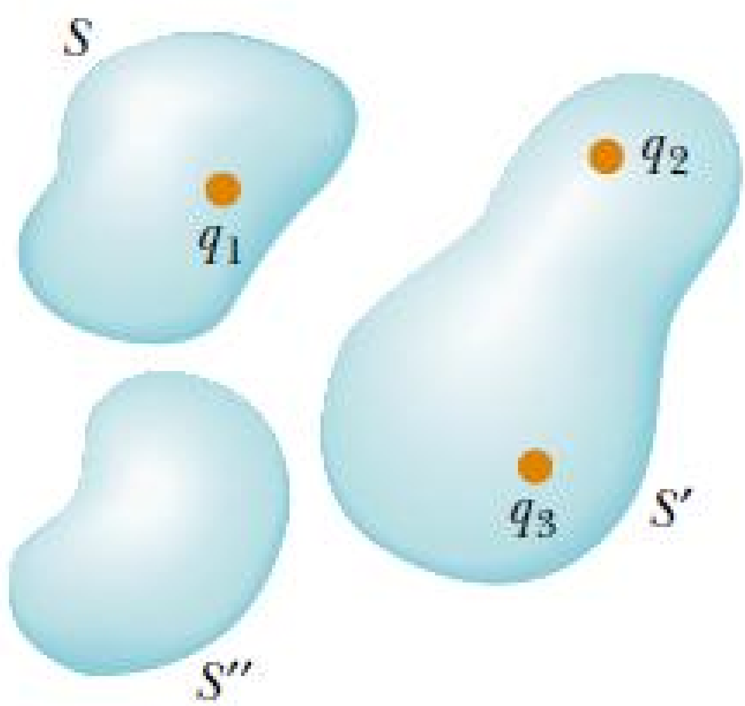
O fluxo de campo elétrico através de uma **superfície fechada** S é igual a $\dfrac{q}{\epsilon_0}$,
onde q é a carga no interior do volume delimitado por S

A Lei de Gauss pode ser bastante útil para calcular o campo elétrico de distribuições que apresentam uma simetria óbvia

Aplicações da Lei de Gauss

Aplicação da Lei de Gauss

Considere o sistema constituído pelas três cargas q_1, q_2 e q_3



$$\phi_S = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$\phi_{S'} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

$$\phi_{S''} = 0$$

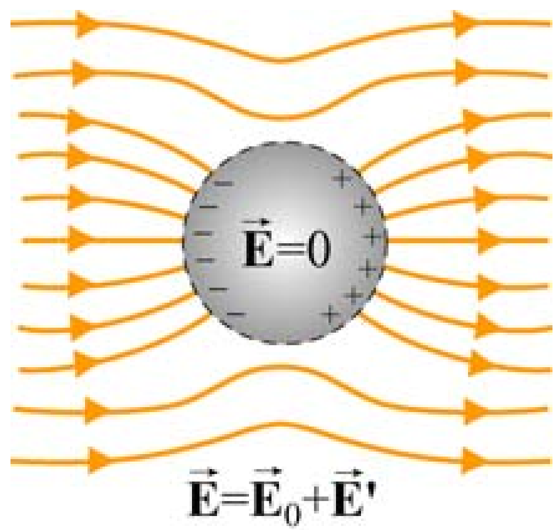
O campo elétrico sobre S" é nulo?

Se $q_2 = -q_3$ o fluxo através de S' seria nulo? O campo elétrico sobre S' seria nulo?

O campo elétrico sobre S é o campo devido apenas a carga q_1?

Campo no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático

O campo elétrico no interior de um condutor ideal em equilíbrio eletrostático é nulo.

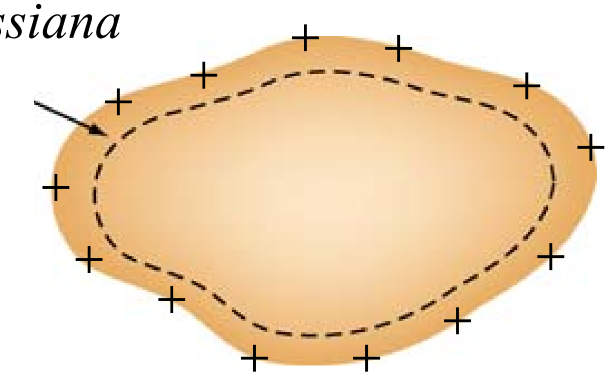


$\vec{E}$ - Campo resultante $\quad$ $\vec{E}_0$ - Campo externo $\quad$ $\vec{E}'$- Campo de polarização

O excesso de carga em um condutor carregado flui para a superfície externa do condutor.

superfície Gaussiana

$\phi = 0$

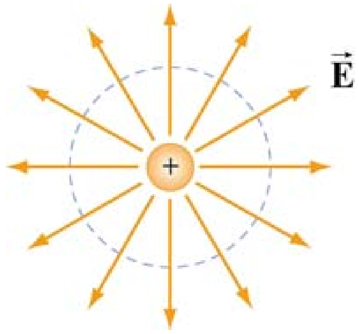


$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

Campo gerado por um fio infinito uniformemente carregado

O problema apresenta simetria cilíndrica: o campo é radial e tem a mesma intensidade em pontos equidistantes ao eixo do fio.

Fio visto de frente



Escolhemos uma superfície Gaussiana (fechada) cilindrica, de raio *r* e comprimento *l*, com eixo coincidente com o fio.

S_1 e S_2 são as tampas e S_3 é a superfície lateral

$$\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3}$$